HELDAGSPRØVE I MATEMATIKK 1T HØST

DEL 1 (Uten hjelpemidler, leveres etter 3 timer)

Oppgave 1. Trekk sammen uttrykkene:

a) $3(a+1) - 4(1-a) - (6a-1)$

$$\begin{aligned} & 3(a+1) - 4(1-a) - (6a-1) \\ = & 3a + 3 - 4 + 4a - 6a + 1 \\ = & a. \end{aligned}$$

b) $\frac{1}{3}(x^2 - y) - \frac{1}{6}(y + 2x) + \frac{4}{5}x^2$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3}(x^2 - y) - \frac{1}{6}(y + 2x) + \frac{4}{5}x^2 \\ = & \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}y - \frac{1}{6}y - \frac{1}{3}x + \frac{4}{5}x^2 \\ = & \frac{17}{15}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y. \end{aligned}$$

c) $(a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)^2$

Metode 1: Vi bruker 1. og 2. kvadratsetning og trekker sammen.

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)^2 &= a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - a^4 + 2a^2b^2 - b^4 \\ &= 4a^2b^2. \end{aligned}$$

Metode 2: Vi faktoriserer med 3. kvadratsetning og ganger sammen.

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)^2 &= (a^2 + b^2 - (a^2 - b^2))(a^2 + b^2 + a^2 - b^2) \\ &= 2b^2 \cdot 2a^2 = 4a^2b^2. \end{aligned}$$

Oppgave 2. Forenkl uttrykkene:

a) $\frac{a^3 \cdot a^8}{a^4 \cdot a^2}$

Potensreglene gir

$$\frac{a^3 \cdot a^8}{a^4 \cdot a^2} = a^{3+8-4-2} = a^5.$$

b) $\dfrac{8^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[4]{4}}{0,25^{-2}} : 4$

Vi skriver alle potensene og røttene om til potenser med 2 som grunntall og bruker potensreglene:

$$\begin{aligned}\frac{8^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[4]{4}}{0,25^{-2}} : 4 &= \frac{(2^3)^{\frac{1}{2}} \cdot (2^2)^{\frac{1}{4}}}{(2^{-2})^{-2}} : 2^2 \\ &= 2^{3\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{4}-(-2)(-2)-2} = 2^{-4} \\ &= \frac{1}{16}.\end{aligned}$$

c) $\dfrac{36^{\frac{1}{4}} \cdot (9a^{\frac{2}{3}})^{1,5}}{\sqrt[6]{8a^3} \cdot a^{-\frac{3}{2}}}$

Vi skriver om til potenser med grunntall 2, 3 eller a.

$$\begin{aligned}\frac{36^{\frac{1}{4}} \cdot (9a^{\frac{2}{3}})^{1,5}}{\sqrt[6]{8a^3} \cdot a^{-\frac{3}{2}}} &= \frac{(3^2)^{\frac{1}{4}} \cdot (2^2)^{\frac{1}{4}} \cdot (3^2)^{1,5} \cdot (a^{\frac{2}{3}})^{1,5}}{(2^3)^{\frac{1}{6}}(a^3)^{\frac{1}{6}} \cdot a^{-\frac{3}{2}}} \\ &= 2^{2\cdot\frac{1}{4}-3\cdot\frac{1}{6}} \cdot 3^{2\cdot\frac{1}{4}+2\cdot 1,5} \cdot a^{\frac{2}{3}\cdot 1,5-3\cdot\frac{1}{6}+\frac{3}{2}} \\ &= 2^0 \cdot 3^{3,5} a^2 \\ &= 27\sqrt{3}a^2.\end{aligned}$$

Oppgave 3. Løs likningene

a) $10^{2x} = 100$

Eksponenten på venstre side må være 2, så $x = 1$.

b) $3x^2 - 21x + 36 = 0$

Deler først på 3 på begge sider, bruker så andregradsformelen. Det gir

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 1 \cdot 12}}{2} = \begin{cases} 4 \\ 3 \end{cases}.$$

c) $\frac{3}{2}x(3 - 5x)(4^x - 16) = 0$

Produktsetningen kan brukes til å splitte likningen i 3:

$$\frac{3}{2}x = 0 \lor 3 - 5x = 0 \lor 4^x - 16 = 0.$$

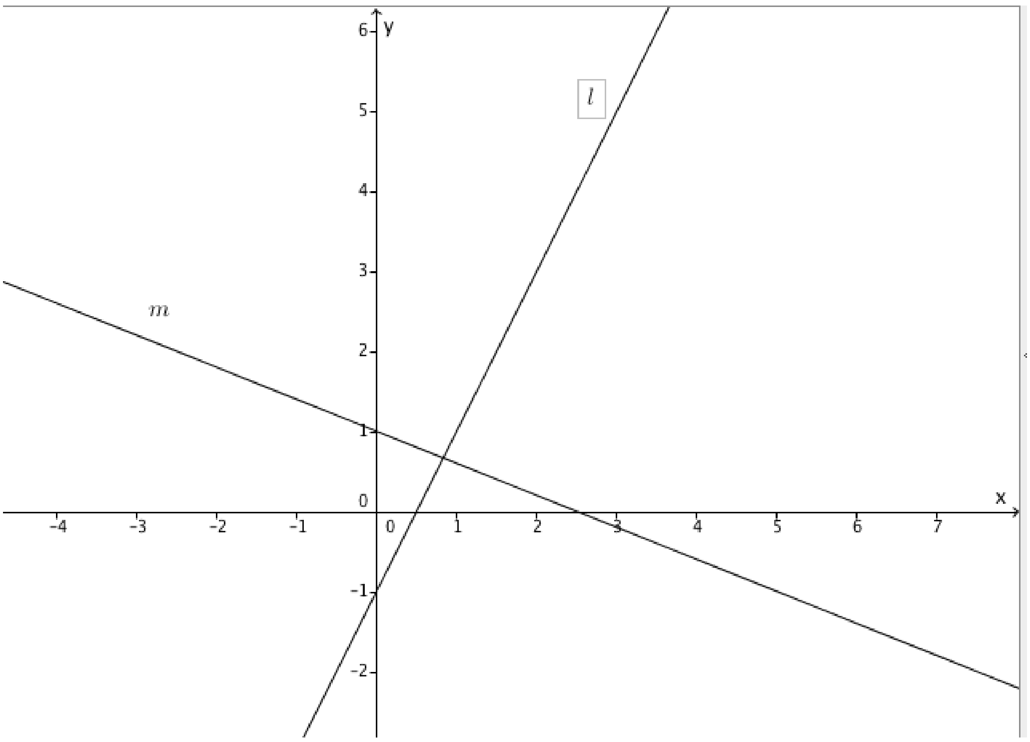
Dette gir $L = \{0, 0.6, 2\}$.

d) $4^x = 0,125$

Høyresiden av likningen er $\frac{1}{8} = 2^{-3}$. Venstre side er 2^{2x}. Sammenlikning av eksponentene gir $2x = -3$, så $x = -1,5$.

Oppgave 4.

a) Tegn linjene l med likning $y = 2x - 1$ og m med likning $y = -\frac{2}{5}x + 1$ i samme koordinatsystem.

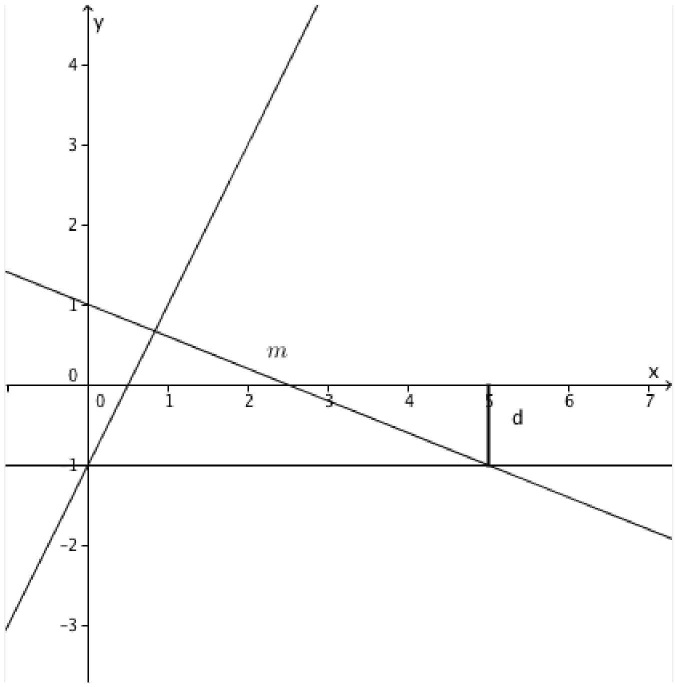


b) Løs likningen

$$-\frac{2}{5}x + 1 = -1$$

grafisk.

Vi tegner linja $y = -1$ i samme koordinatsystem som m og finner skjæringspunktet mellom disse linjene.



Skjæringspunktet har x-koordinaten 5, så løsningsmengden til likningen er $L = \{5\}$.

c) En linje n er parallell med l og skjærer m for $x = 3$. Bestem likningen for n.

Siden n er parallell med l, må stigningstallet til n være likt stigningstallet til l, altså 2. Punktet på m med x-koordinat lik 3 har y-koordinat lik $-\frac{2}{5} \cdot 3 + 1 = -\frac{1}{5}$. Altså ligger $\left(3, -\frac{1}{5}\right)$ på n. Ettpunktsformelen gir likningen for n:

$$y - \left(-\frac{1}{5}\right) = 2(x - 3)$$
$$y = 2x - \frac{31}{5}.$$

Oppgave 5. Strømmåleren til en husholdning viser at de bruker 1000kWh energi i september. I august brukte de 20 prosent mindre energi, og de regner med å bruke 20 prosent mer energi i oktober enn i september.

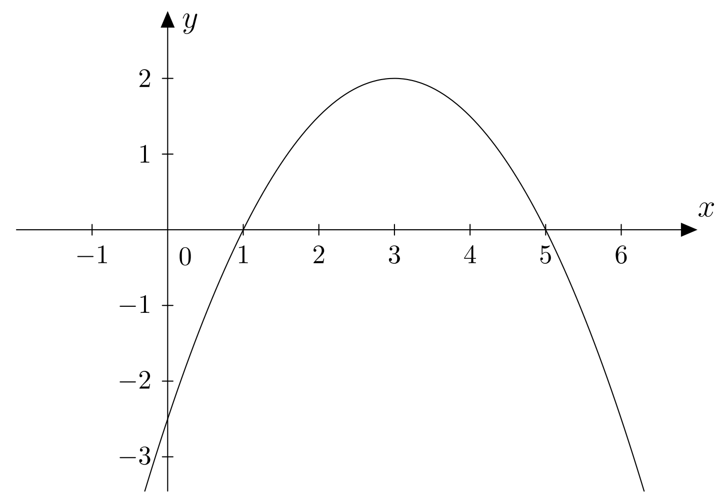
a) Hvor mye energi brukte husholdningen i august?

   I august brukte husholdningen $1000 \cdot 0.8 = 800$ kilowattimer.

b) Hvor mange prosent mer energi regner husholdningen med å bruke i oktober enn i august?

   I oktober brukte husholdningen $1000 \cdot 1.2 = 1200$ kilowattimer. Siden $1200/800 = 1.5$, betyr det at husholdningen brukte 50% mer energi i oktober enn i august.

Oppgave 6. Grafen til en andregradsfunksjon $f(x) = ax^2+bx+c$ er gitt i koordinatsystemet nedenfor:



a) Bestem nullpunktene til f.

   Nullpunktene er x-koordinatene til skjæringspunktene mellom grafen til f og x-aksen. Vi ser at nullpunktene er 1 og 5.

b) Bestem maksimalpunktet til f.

   Vi ser at punktet på grafen med størst y-koordinat er $(3, 2)$, så maksimalpunktet er 3.

c) Angi en faktorisering av $f(x)$.

Siden $f(x)$ er et andregradspolynom, gir nullpunktsmetoden for faktorisering at

$$f(x) = a(x-1)(x-5).$$

For å beregne a, bruker vi at $f(3) = 2$. Det gir likningen

$$2 = a \cdot 2(-2),$$

så $a = -0,5$. Dermed er

$$f(x) = -\frac{1}{2}(x-1)(x-5).$$

HELDAGSPRØVE I MATEMATIKK 1T HØST

DEL 2 (Med hjelpemidler, leveres etter 5 timer)

Oppgave 7. Bruk CAS til å utføre følgende:

a) Løs likningen

$$5^x - 0,04 = 0.$$

Vi skriver følgende i CAS-modulen i GeoGebra:

```
Løs[5^x-.04]
```

$\rightarrow \quad \{x = -2\}$

Dette viser at løsningsmengden er $L = \{-2\}$.

b) Faktoriser uttrykket

$$3^{2x} - 2x \cdot 3^x + x^2.$$

Vi skriver følgende i CAS-modulen i GeoGebra:

```
Faktoriser[3^(2x)-2x*3^x+x^2, x]
```

$\rightarrow \quad (x - 3^x)^2$

c) Finn en formel for v fra formelen

$$E = \frac{1}{2}mv^2.$$

Vi skriver følgende i CAS-modulen i GeoGebra:

```
Løs[E=1/2m*v^2, v]
```

$(x - 3^x)^2$

$$\rightarrow \left\{ v = -\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{E\,m}}{m}, v = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{E\,m}}{m} \right\}$$

Dette viser at

$$v = \pm\sqrt{2}\frac{\sqrt{Em}}{m} = \pm\sqrt{\frac{2Em}{m^2}} = \pm\sqrt{\frac{2E}{m}}.$$

d) Regn ut og trekk sammen

$$(a - b^2)^4$$

for $b = 2$.

Vi bruker ikonene for `Sett inn` og `Utvid` i CAS-modulen i GeoGebra:

```
(a-b^2)^4
```

ByttUt, a=a,b=2: $(a - 4)^4$

$(a - 4)^4$

RegnUt: $a^4 - 16\,a^3 + 96\,a^2 - 256\,a + 256$

Oppgave 8. La

$$f(x) = 2^{0,2x}$$

med definisjonsmengde $D_f = \langle 0, \rightarrow \rangle$. La også

$$g(x) = 4\sqrt[4]{4x^2 - 8}$$

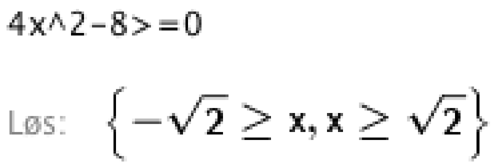
være definert for alle reelle tall som gir mening i funksjonsuttrykket.

a) Bestem definisjonsmengden D_g til g.

Funksjonen g er definert så lenge radikanden er ikke-negativ, altså så lenge

$$4x^2 - 8 \geq 0.$$

Vi løser ulikheten med CAS:



Vi ser at

$$D_g = \langle \leftarrow, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, \rightarrow\rangle.$$

b) Tegn grafene til f og g i samme koordinatsystem.

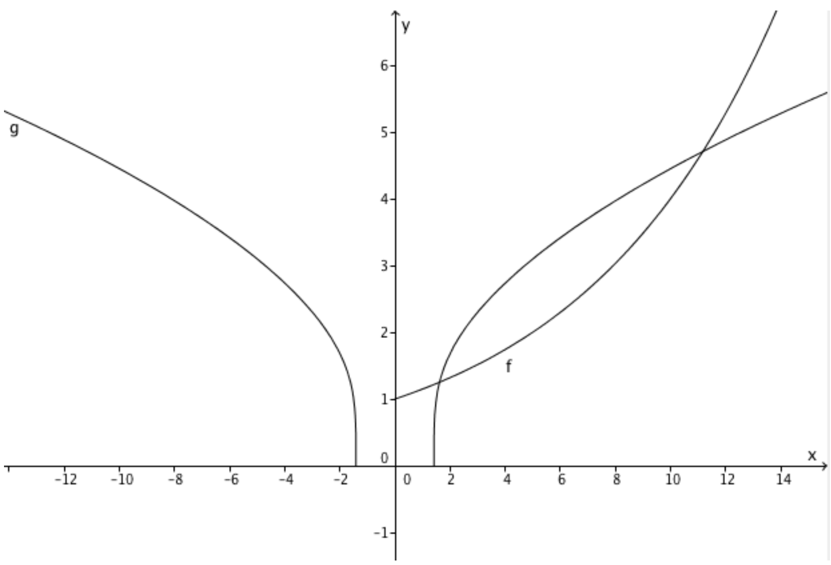
Vi beskriver funksjonene i GeoGebra ved kommandoene

`Funksjon[2^(.2x),0,∞]`

i inntastingsfeltet og

`g(x):=(4x^2-8)^(1/4)`

i CAS-modulen. Det gir følgende graf:

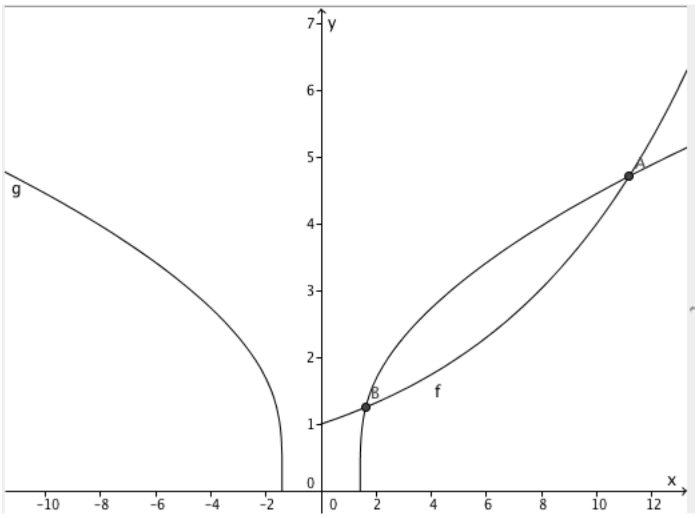


c) Løs likningen

$$f(x) = g(x)$$

ved å bruke graftegner.

Vi bruker verktøyet Skjæring mellom to objekt på de to grafene og får følgende:



Løsningsmengden består av x-koordinatene til skjæringspunktene. Det betyr at

$$L = \{1.62, 11.18\}.$$

d) Sjekk svaret i forrige deloppgave ved å bruke CAS.

Vi gir følgende kommandoer i CAS:

```
g(x):=(4x^2-8)^(1/4)
```

$\rightarrow\ \mathbf{g(x) := \sqrt[4]{4\,x^2 - 8}}$

```
f(x) := 2^(1 / 5 x)
```

$\rightarrow\ \mathbf{f(x) := 2^{\frac{1}{5}x}}$

```
NLøs[f(x)=g(x)]
```

$\rightarrow\ \mathbf{\{x = -1.45, x = 1.62, x = 11.18\}}$

Vi må forkaste den negative løsningen siden f bare er definert for ikke-negative x. Det gir igjen

$$L = \{1.62, 11.18\}.$$

Oppgave 9. Lengden av jordas ekvator er ca. 40 075 km.

a) Beregn jordas volum målt i kubikkmeter. Oppgi svaret på standardform avrundet til to sifre etter komma. [Husk at volum av kule er gitt ved formelen $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.]

Jordas radius er radius i en sirkel med lengden av ekvator som omkrets. Denne radien blir (40 075 km) $/2\pi$. Jordas volum V er

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot ((40075\,\text{km})/2\pi)^3 \approx 1,09 \cdot 10^{12}\,\text{km}^3.$$

[Vi antar her at jorda er en kule. Det er ikke helt korrekt, men volumet vi beregner er mindre enn 0,5% større enn det riktige volumet, så det er en god tilnærming.]

Jorda er ikke helt kuleformet på grunn av jordrotasjonen. Avstanden langs jordoverflaten fra polene til ekvator er 10 001 966 m.

b) Hva er forholdet mellom radien r_{e} til ekvatorsirkelen og radien r_{p} til sirkelen med sentrum i jordas senter og som går gjennom polene?

[Her er vi svært upresise. En meridian er ikke en halvsirkel, men mer lik en halv ellipse. Den sirkelen vi betrakter her vil altså bare være en grov tilnærming til den virkelige kurven, og radien r_{p} vi beregner vil være en slags middelverdi av avstandene fra jordas sentrum til de ulike punktene på en meridian.]

Vi bruker radien $r_{\mathrm{e}} = 40075\,\mathrm{km}/2\pi$ som vi fant i forrige deloppgave. Radien r_{p} er radius i en (tilnærmet) kvartsirkel av en sirkel med omkrets lik $4 \cdot 10001966$ m. Forholdet blir

$$\begin{aligned}\frac{r_{\mathrm{e}}}{r_{\mathrm{p}}} &= \frac{40075\,\mathrm{km}/2\pi}{4\cdot 10001966\,\mathrm{m}/2\pi} \\ &= \frac{4,0075\cdot 10^7\,\mathrm{m}}{4\cdot 1,0001966\cdot 10^7\,\mathrm{m}} \\ &\approx 1,00168.\end{aligned}$$

c) Hvor mange prosent er r_{p} mindre enn r_{e}?

Vi beregner

$$\frac{r_{\mathrm{p}}}{r_{\mathrm{e}}} = \left(\frac{r_{\mathrm{e}}}{r_{\mathrm{p}}}\right)^{-1} \approx .9983.$$

Dette er vekstfaktoren for 0,17% nedgang, så r_{p} er ca. 0,17% mindre enn r_{e}.

Oppgave 10. Bestem konstanten c slik at

$$x^2 + \sqrt{\frac{3}{2}}x + c$$

blir et fullstendig kvadrat.

Fullstendige kvadraters metode sier at

$$c = \left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 = \frac{3}{8}.$$

SLUTT